Granica funkcji – obliczanie granic

Ważniejsze granice oraz przykłady obliczania granic

Przed przejściem do przykładów obliczania granic podamy jeszcze kilka ważnych granic funkcji:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad a>1 \\ 1 & \text{dla} \quad a=1 \\ +\infty & \text{dla} \quad 0<a<1 \end{cases}$, (2) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0<a<1 \\ 1 & \text{dla} \quad a=1 \\ +\infty & \text{dla} \quad a>1 \end{cases}$,

(3) $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{dla} \quad a>1 \\ +\infty & \text{dla} \quad 0<a<1 \end{cases}$, (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{dla} \quad a>1 \\ -\infty & \text{dla} \quad 0<a<1 \end{cases}$,

(5) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$, (6) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$,

(7) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ (8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$,

(9) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$, (10) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$,

(11) $\lim\limits_{x\to0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, (12) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$,

(13) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, (14) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Uwaga. Granice (1) – (4) można łatwo odczytać z wykresów funkcji wykładniczej i logarytmicznej. Ponadto korzystając ze wzorów: (5) i (7) oraz twierdzenia o granicy funkcji złożonej można wyprowadzić ogólniejsze wzory (dla $a \in \mathbb{R}$):

(15) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$, (16) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} ax}{ax} = 1$.

Przykład 1. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3-2x+1)$, b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{1-2x}$, c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$, e) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1-\dfrac{\sin 5x}{9x}}$, f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}2x}$,

g) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\mathrm{arctg}(x-3)}{6-2x}$, h) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln(x+2)}{x^2+x}$, i) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2^{3x-6}-1}{x-2}$,

j) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}$, k) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$, l) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x}{x-1}$,

m) $\lim\limits_{x\to-3^+}2^{\frac{4x+1}{9-x^2}}$, n) $\lim\limits_{x\to2^-}\mathrm{arctg}\dfrac{1-x}{2x-4}$.

Rozwiązanie.

a) W tego tupu granicach, jeżeli otrzymujemy wyrażenie nieoznaczone, to wystarczy najwyższą potęgę zmiennej x wyciągnąć przed nawias:

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^3-2x+1)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(5-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=[+\infty\cdot5]=+\infty.$$

b) Postępujemy podobnie, jak przy obliczaniu granic odpowiednich ciągów, tj. licznik i mianownik dzielimy przez najwyższą potęgę zmiennej x występującą w mianowniku, a więc tutaj przez x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+5}{1-2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x}+\frac{3x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3+\frac{5}{x}}{\frac{1}{x}-2}=\left[\frac{+\infty}{-2}\right]=-\infty.$$

c) W przypadku tego typu granic należy zachować pewną ostrożność. Okazuje się, że zastosowanie powyższej (przykład b)) metody doprowadziłoby do błędnego rozwiązania:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=2\quad\leftarrow\ \textbf{błędne rozwiązanie}.$$

Taka metoda obliczeń byłaby poprawna przy $x\to+\infty$. W naszym przypadku, tj. gdy $x\to-\infty$, należy zastosować inny sposób postępowania:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}\overset{(x<0)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-2\,.$$

d) Podobnie, jak przy obliczaniu granicy odpowiednich ciągów stosujemy wzór

$$a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}=$$

$$=\left[\frac{1}{+\infty}\right]=0\,.$$

e) W tym przykładzie zastosujemy wzór (15):

$$\lim_{x\to0}\sqrt{1-\frac{\sin5x}{9x}}=\lim_{x\to0}\sqrt{1-\frac{\sin5x}{5x}\cdot\frac{5}{9}}\overset{(15)}{=}\left[\sqrt{1-1\cdot\frac{5}{9}}\right]=\frac{2}{3}\,.$$

f) $$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}3x}{\mathrm{tg}2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{tg}3x}{3x}\cdot3}{\frac{\mathrm{tg}2x}{2x}\cdot2}\overset{(16)}{=}\left[\frac{1\cdot3}{1\cdot2}\right]=\frac{3}{2}$$

g) W tym przykładzie oraz dwóch następnych stosujemy pewne podstawienia (dokonujemy zamiany granicy), tak aby można było skorzystać z gotowych wzorów. W przykładzie g) dokonamy podstawienia $x-3=u$. Zatem, gdy $x\to3$, to $u\to0$.

$$\lim_{x\to3}\frac{\mathrm{arctg}(x-3)}{6-2x}=\lim_{x\to3}\frac{\mathrm{arctg}(x-3)}{-2(x-3)}=\lim_{u\to0}\frac{\mathrm{arctg}\,u}{-2u}\overset{(10)}{=}-\frac{1}{2}\,.$$

h) $$\lim_{x\to-1}\frac{\ln(x+2)}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{\ln(x+1+1)}{(x+1)x}=\left\{\begin{array}{c}x+1=u,\ \text{to}\ x=u-1\\ x\to-1,\ \text{to}\ u\to0\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{\ln(u+1)}{u(u-1)}\overset{(14)}{=}-1\,.$$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{3x-6}-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^{3(x-2)}-1}{x-2} = \left\{\begin{array}{c} x-2=\dfrac{1}{3}u \\ x\to 2,\ \text{to}\ u\to 0 \end{array}\right\} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{2^{u}-1}{\dfrac{1}{3}u} =$

$= \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{3(2^{u}-1)}{u} \overset{(11)}{=} 3\ln 2$.

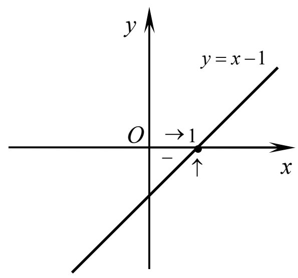
j) Łatwo sprawdzić, że mamy tutaj do czynienia z symbolem nieoznaczonym $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Zatem liczba 1 jest pierwiastkiem zarówno licznika, jak i mianownika, a co za tym idzie (twierdzenie Bezouta) w liczniku i mianowniku można wydzielić czynnik $x-1$. W tym celu oba trójmiany kwadratowe zapisujemy w postaci iloczynowej. Następnie wystarczy skrócić ułamek przez ten wspólny czynnik, aby pozbyć się wyrażenia nieoznaczonego:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+3}{x-2}=\left[\frac{4}{-1}\right]=-4.$$

k) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)=12$.

l) Po podstawieniu liczby 1 w miejsce zmiennej x w wyrażeniu występującym pod symbolem granicy otrzymamy $\left[\dfrac{2}{0}\right]$. Wynik zatem zależy od tego, czy przy $x\to 1^-$ mianownik $(x-1)\to 0^+$, czy też $(x-1)\to 0^-$. Można to ocenić w sposób mniej lub bardziej formalny. W pierwszym przypadku wystarczy zauważyć, że ponieważ $x\to 1^-$, to aby określić znak wyrażenia $x-1$ można w miejsce x podstawić jakąś wartość „nieco” mniejszą od 1. Jeżeli od liczby mniejszej od 1 odejmiemy liczbę 1, to otrzymamy wartość ujemną (0^-).

Bardziej ścisła metoda polega na naszkicowaniu wykresu mianownika i sprawdzeniu, czy przy $x\to 1^-$ dąży on do 0 od góry (od strony liczb dodatnich) i wtedy mamy 0^+, czy też od dołu tj. od strony liczb ujemnych (0^-). W naszym przypadku wartości mianownika dążą do zera od dołu (rysunku 4). Zatem ostatecznie otrzymujemy:



Rys. 4. Ilustracja do przykład 1l)

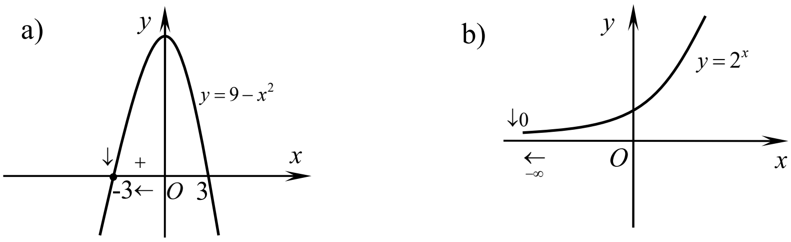
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x-1}=\left[\frac{+}{0^-}\right]=-\infty\,.$$

m) W tym przypadku musimy najpierw ocenić, do czego dąży wykładnik potęgi i w zależności od wyniku określić granicę całej funkcji posługując się wzorem (1) ewentualnie (2), lub (co wygodniejsze) odczytać granicę z wykresu funkcji $y=2^x$.

Ponieważ

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{4x+1}{9-x^2}=\left[\frac{-}{0^+}\right]=-\infty \quad \text{(rysunek 5a)), zatem}$$

$$\lim_{x\to -3^+} 2^{\frac{4x+1}{9-x^2}}=\left[2^{-\infty}\right]=0 \qquad \text{(rysunek 5b)).}$$



Rys. 5. Ilustracja do przykładu 1j)

n) Postępujemy podobnie, jak w przykładzie poprzednim. Sporządzenie odpowiednich rysunków pozostawiamy Czytelnikowi. Ponieważ:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1-x}{x^2-2x}=\left[\frac{-}{0^-}\right]=+\infty\text{, zatem}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\operatorname{arctg}\frac{1-x}{x^2-2x}=\left[\operatorname{arctg}(+\infty)\right]=\frac{\pi}{2}\,.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć granicę:

1. $\lim\limits_{x\to -\infty}(-3x^2+x-2)$,

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}(-3x^2+x-2)$,

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-6x+5}{-3x^3-x+5}$,

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(3-2x)^3}{x^2+x-1}$,

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+5}{\sqrt[4]{x^3+x}\ +x}$,

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{2x+1}}$,

7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}}{3x-1}$,

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$,

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$,

10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$,

11. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$,

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$,

13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(\operatorname{arctg}x)$,

15. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sin 5x}$,

6.16. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\dfrac{\sin 3x}{x}+1}$,

17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{8x}$,

18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}\sin^2 2x}{3x^4}$,

19. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{1+x}\ -1}$,

20. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$,

21. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{2x+1}$,

22. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$,

23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x^3+3x^2-4x}$,

24. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$,

25. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$,

26. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$,

27. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$,

28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}$,

29. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$,

30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_2(3x+1)}{x}$,

31. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{x+1}-3}{2x}$,

32. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\mathrm{e}^{4x-8}-1}{x-2}$,

33. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{1-x}$,

34. $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1+x}{4-x^2}$,

35. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x}{(x-3)^2}$,

36. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$,

37. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-10}{(x-5)^4}$,

38. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^4}$,

39. $\lim\limits_{x\to 1} 3^{\frac{-1}{(x-1)^2}}$,

40. $\lim\limits_{x\to -4^-} \left(1-\mathrm{e}^{\frac{2x}{x+4}}\right)$,

41. $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$,

42. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[3x+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{2x}{x+4}}\right]$,

43. $\lim\limits_{x\to -3^-} \operatorname{arctg}\dfrac{4+x}{9-x^2}$,

44. $\lim\limits_{x\to -2} \operatorname{arcctg}\dfrac{x^3}{(x+2)^2}$,

45. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} 2^{\operatorname{tg} x}$,

46. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\mathrm{e}^x-3}{\ln\ln x}$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch